Selbsttest – Integralrechnung 1

1) Gib eine Stammfunktion an.

a) $f(x) = x^3 - x^2$

b) $f(x) = x \cdot (3x - 2)$

c) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{12}{5}x^5 \right)$

d) $f(x) = \frac{2x^2 - x^3}{x^2}$

e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$

f) $f(x) = \frac{x - 1}{x^3}$

2) Berechne den Inhalt der Fläche, die von den beiden Kurven $f(x) = x^2 - 4$ und $g(x) = 4 - x^2$ eingeschlossen wird.

3) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 - 1$.

a) Berechne das Integral von $f(x)$ über dem Intervall $[0;3]$.

b) Berechne den Flächeninhalt zwischen $f(x)$ und der *x*-Achse über dem Intervall $[0;3]$.

4) Die Funktion $f(x) = -x^2 + 3$ soll im Punkt $P(1|2)$ ohne einen Knick in eine Gerade $g(x) = mx + c$ übergehen.
Hinweis: Ohne Knick bedeutet: $f(a) = g(a)$ und
$f'(a) = g'(a)$ muss in dem Punkt $P(a|f(a))$ gelten.
Gib die Gleichung der Geraden g an.

Selbsttest – Integralrechnung 1

Lösungen:

1) a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3$

b) $f(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow F(x) = x^3 - x^2$

c) $F(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{5}x^6 \right)$

d) $f(x) = 2 - x \Rightarrow F(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$

e) $f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}$

f) $f(x) = x^{-2} - x^{-3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}$

2) (1) Schnittpunkte von f und g:

$x^2 - 4 = 4 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$

(2) Fläche: $A = \left| \int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\,dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4 - 4 + x^2)\,dx \right|$

$= \left| \int_{-2}^{2} (2x^2 - 8)\,dx \right| = \left[\frac{2}{3}x^3 - 8x \right]_{-2}^{2} = \left| \frac{16}{3} - 16 - \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) \right| = \frac{64}{3}$

3) a) Integral: $\int_0^3 (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^3 = 9 - 3 = 6$

b) (1) Nullstellen: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 1$

(2) Fläche: $A = \left| \int_0^1 (x^2 - 1)\,dx \right| + \left| \int_1^3 (x^2 - 1)\,dx \right|$

$= \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^1 \right| + \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right]_1^3 \right| = \left| \frac{1}{3} - 1 \right| + \left| 9 - 3 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \right| = \frac{22}{3}$

4) $g'(x) = m$ und $f'(x) = -2x$

(I) $g(1) = f(1) \Leftrightarrow m \cdot 1 + c = 2$

(II) $g'(1) = f'(1) \Leftrightarrow \boxed{m = -2}$

$m = -2$ in (I): $-2 + c = 2 \Leftrightarrow \boxed{c = 4}$

$\Rightarrow y = -2x + 4$